22232167 4

2200760

B. Sc. (Second Year) Examination, 2024

(Major-II/Minor/Open Elective)

MATHEMATICS

Paper : Second

(Advanced Calculus and Partial Differential Equations)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

Minimum Pass Marks : 28

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all ***three*** *sections as directed. Distribution of marks is given with sections.*

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न) 5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note : Answer all the following questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$ का मान है—

(a) 0

(b) e

(c) $1/e$

(d) 1

The value of $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$ is :

(a) 0

(b) e

(c) $1/e$

(d) 1

(ii) अनन्त श्रेणी $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\ldots$ है—

(a) अपसारी

(b) दोलायमान

(c) अभिसारी

(d) इनमें से कोई नहीं

The finite series $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\ldots$ is :

(a) Divergent

(b) Oscillatory

(c) Convergent

(d) None of these

(iii) समघात फलन $f(x, y)=x\tan^{-1}(x/y)$ की घात है—

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

The degree of homogeneous function

$f(x, y) = x\tan^{-1}(x/y)$ is

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) None of these

(iv) $\overline{|n}\ \overline{|1-n}$ का मान है—

(a) $B(n, 1)$

(b) $B(n, 1-n)$

(c) $B(n, 1-2n)$

(d) $B(1-n, 1-n)$

The value of $\overline{|n}\ \overline{|1-n}$ is :

(a) $B(n, 1)$

(b) $B(n, 1-n)$

(c) $B(n, 1-2n)$

(d) $B(1-n, 1-n)$

(v) $2r+5s+2t$ का सहायक समीकरण है—

(a) $2m^2+5m+2=0$

(b) $2m^2-5m+2=0$

(c) $2m^2-5m-2=0$

(d) इनमें से कोई नहीं

Subsidiary equation of $2r+5s+2t$ is :

(a) $2m^2+5m+2=0$

(b) $2m^2-5m+2=0$

(c) $2m^2-5m-2=0$

(d) None of these

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न) $5 \times 5 = 25$

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : Answer all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. दर्शाइये कि $\sqrt{8}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

Show that $\sqrt{8}$ is not a rational number.

अथवा

Or

R में आर्किमिडीज गुणधर्म का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Archimedes property in R.

इकाई-II

Unit-II

3\. अनन्त श्रेणी

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots$$

के अभिसरण या अपसरण का परीक्षण कीजिये।

Test the convergence or divergence of the infinite series

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots$$

अथवा

Or

निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिये—

(a) $f(x)=x^3-4x$

(b) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Verify Rolle's theorem for the following functions :

(a) $f(x) = x^3 - 4x$

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

इकाई-III

Unit-III

4. सिद्ध कीजिये कि—

$$JJ' = 1$$

Prove that :

$$JJ' = 1$$

अथवा

Or

यदि $u = f(x-y, y-z, z-x)$

तो सिद्ध कीजिये कि—

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

If $u = f(x-y, y-z, z-x)$

then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

इकाई-IV

Unit-IV

5. हल कीजिये—

$$(Y+Z)p+(Z+X)q=x+y$$

Solve :

$$(Y+Z)p+(Z+X)q=x+y$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$yt-q=xy$$

Solve :

$$yt-q=xy$$

इकाई-V

Unit-V

6. हल कीजिये—

$$\left(D^2+3DD'+2D'^2\right)z=x+y$$

Solve :

$$\left(D^2+3DD'+2D'^2\right)z=x+y$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xy$$

Solve :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xy$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 4×10=40

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Note : *Answer all the **four** questions. **One** question from each unit is compulsory. Each question carries 10 marks.*

इकाई-I

Unit-I

7. सिद्ध कीजिये कि—

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left\{(n+1)(n+2)......(n+n)\right\}^{1/n}\right]}{n} = \frac{4}{e}$$

Prove that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left\{(n+1)(n+2)......(n+n)\right\}^{1/n}\right]}{n} = \frac{4}{e}$$

अथवा

Or

बोधायन की संक्षिप्त जीवनी लिखिये।

Write a brief biography of Bodhayan.

इकाई-II

Unit-II

8. टेलर प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove Taylor's theorem.

अथवा

Or

यदि

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & \quad x=0\end{cases}$$

दर्शाइये कि f, $x=0$ पर संतत है, किन्तु $f'(0)$ विद्यमान नहीं है।

If $f(x)=\frac{x}{1+e^{1/x}}$ when $x \neq 0$ and $f(0)=0$. Show that $f(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 0$.

इकाई-III

Unit-III

9. प्रतिबन्धों $ax^2+by^2+cz^2=1$ और $lx+my+nz=0$ के अन्तर्गत $u=x^2+y^2+z^2$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये। परिणाम की ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिये।

Find the maxima and minima of $u=x^2+y^2+z^2$ subject to the conditions $ax^2+by^2+cz^2=1$ & $lx+my+nz=0$. Interpret the result geometrically.

अथवा

Or

तीन चरों के एक समघात फलन के लिए ऑयलर प्रमेय का कथन लिखिये और सिद्ध कीजिये।

State and prove Euler's theorem for a homogeneous function of three variables.

इकाई-IV

Unit-IV

10. समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

का वर्गीकरण कीजिये और विहित रूप में रूपान्तरित कीजिये।

Classify and reduce the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

to canonical form.

अथवा

Or

हल कीजिये—

$$\left(D^2 - DD' + D' - 1\right)z = \cos\left(x + 2y\right) + e^y$$

Solve :

$$\left(D^2 - DD' + D' - 1\right)z = \cos\left(x + 2y\right) + e^y$$