

222321674

2200759

B. Sc. (Second Year) Examination, 2024

(Major-I)

MATHEMATICS

(Abstract Algebra and Linear Algebra)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार उत्तर दीजिए।
निर्धारित अंक खण्डों के समक्ष अंकित हैं।

Note : Attempt all questions of all three section
as directed. Marks are indicated against
sections.

खण्ड-अ

Section-A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(Objective Type Questions)

5×1=5

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का
है।

Note : Attempt all questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) निम्नलिखित में से कौन सा समूह नहीं है—

(a) $(\{1, w, w^2\}, \cdot)$

(b) $(\{1, -1\}, \cdot)$

(c) $(\{1, -1\}, +)$

(d) $(\{1, -1, i-i\}, \cdot)$

Which of the following is not a group :

(a) $(\{1, w, w^2\}, \cdot)$

(b) $(\{1, -1\}, \cdot)$

(c) $(\{1, -1\}, +)$

(d) $(\{1, -1, i-i\}, \cdot)$

(ii) G और G' तुल्याकारी समूह है यदि G चक्रीय हो तो—

- (a) G' चक्रीय होगा
- (b) G' चक्रीय हो सकता है
- (c) G' चक्रीय नहीं होना चाहिए
- (d) G और G' में अवयवों की संख्या समान है

G and G' are isomorphic, if G is cyclic then :

- (a) G' will be cyclic
- (b) G' may be cyclic
- (c) G' must not be cyclic
- (d) G and G' have the same number of elements

(iii) क्रमविनिमेय वलन का समाकारी प्रतिबिम्ब एक—

- (a) योग के सापेक्ष उपसमूह है
- (b) गुणन के सापेक्ष उपसमूह है
- (c) क्रमविनिमेय वलय है
- (d) इनमें से कोई नहीं

Homomorphic image of a commutative ring is :

- (a) Subgroup with respect to addition

- (b) Subgroup with respect to multiplication
 - (c) Commulative ring
 - (d) None of these
- (iv) रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय का कोई उपसमुच्चय—
- (a) रैखिकतः स्वतंत्र होता है
 - (b) रैखिकतः परतंत्र होता है
 - (c) रैखिकतः स्वतंत्र एवं परतंत्र होता है
 - (d) इनमें से कोई नहीं

Any subset of a linearly independent set is :

- (a) Linearly independent
 - (b) Linearly dependent
 - (c) Linearly independent and dependent both
 - (d) None of these
- (v) यदि एक वर्ग आव्यूह के सभी अभिलक्षणिक मान भिन्न-भिन्न हैं, तब आव्यूह समरूप है—
- (a) एक त्रिभुजीय आव्यूह के
 - (b) विकर्ण आव्यूह के
 - (c) यूनीटरी आव्यूह के
 - (d) लाम्बिक आव्यूह के

If all the characteristic values of a square matrix are different, then it is similar to :

- (a) Triangular matrix
- (b) Diagonal matrix
- (c) Unitary matrix
- (d) Orthogonal matrix

खण्ड-‘ब’

Section-‘B’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. Each question carries 5 marks.

2. सिद्ध कीजिए कि समूह G के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि वे एक-दूसरे में अन्तर्विष्ट हों।

Prove that the union of two subsets of a group G is a subgroup if and only if they are contained in each other.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

Prove that every group of prime order is cyclic.

3. सिद्ध कीजिए कि समूह G पर सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह है।

Prove that the set of all automorphisms on a group G is a group with respect to a composition of mappings.

अथवा

Or

यदि $f: G \rightarrow G'$ एक आच्छादक समाकारिता हो और H समूह G का प्रसामान्य उपसमूह हो तब सिद्ध कीजिए $f(H)$, समूह G' का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

If $f: G \rightarrow G'$ be an onto homomorphism and H be a normal subgroup, then prove that $f(H)$ is normal subgroup of the group G' .

4. वलय एवं वलयों के प्रकार को परिभाषित कीजिए।

Define ring and types of rings.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णाकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

5. जाँच कीजिए कि सदिशों $(2, 3, 1)$, $(-1, 4, -2)$ एवं $(1, 18, -4)$ का समुच्चय सदिश समष्टि $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है या परतंत्र।

Examine whether the set of vectors $(2, 3, 1)$, $(-1, 4, -2)$ and $(1, 18, -4)$ is linearly independent or dependent in the vector space $V_3(R)$.

अथवा

Or

यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब सिद्ध कीजिए।

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

6. सिद्ध कीजिए कि रैखिक संकारक T के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत भिन्न-भिन्न शून्येतर आइगेन सदिशों का समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

Prove that the set of distinct non zero eigen vectors corresponding to distinct Eigen value of a linear operator T is linearly dependent.

अथवा

Or

माना कि R^3 पर T एक रैखिक संकारक है जो

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$$

से परिभाषित है। आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

जहाँ

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$$

है के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be a linear operator on R^3 defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$$

then find the matrix of T with respect to the basis

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

where

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 1)$$

खण्ड-‘स’

Section-‘C’

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

4×10=40

(Long Answer Type Questions)

नोट : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर विस्तार से दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Note : Attempt any four questions in detail. Each question carries 10 marks.

7. विभाग समूह को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि

चक्रीय समूह का प्रत्येक विभाग समूह चक्रीय होता है परन्तु विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं है।

Define quotient group and prove that the quotient group of a cyclic group is cyclic but converse is not necessary true.

8. अनन्त समूह के लिए कैली का प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley's theorem for infinite groups.

9. समूह स्वाकारिता को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यदि f समूह G की स्वाकारिता है तथा N समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तब $f(N)$ समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

Define automorphism with examples and show that if f is a automorphism of a group G and N be a normal subgroup of G then $f(N)$ will be a normal subgroup of G .

10. यदि f वलय R से वलय R' में समाकारिता है, तब सिद्ध कीजिए कि समाकारिता की अष्टि $\ker f$, R की गुणजावली

होती है तथा यदि A वलय R की गुणजावली है तब $f(A)$, $f(R)$ की गुणजावली होती है।

Let f be a homomorphism from a ring R to a ring R^1 , then prove that the Kernel of f , $\ker f$ is an ideal of R and if A be an ideal of R then $f(A)$ is an ideal of $f(R)$.

11. किसी सदिश समष्टि का आधार को परिभाषित कीजिए तथा विस्तार प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

Define basis of a vector space and state and prove extension theorem.

12. जाति-शून्यता प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Rank-Nullity theorem.

13. दर्शाइये कि आव्यूह A विकर्णीय है—

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$