

110163

B. A./B. Sc. (First Year) Examination, 2024

(Major-I)

MATHEMATICS

(Algebra, Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार हल करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all **three** sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note : Answer all the following questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) कौन-सा “पंच सिद्धान्त” नहीं है—

(a) सूर्य सिद्धान्त

(b) वशिष्ठ सिद्धान्त

(c) चंद्र सिद्धान्त

(d) रोमक सिद्धान्त

Which one is not a “Panch Siddhant” :

(a) Surya Siddhant

(b) Vashist Siddhant

(c) Chandra Siddhant

(d) Romak Siddhant

(ii) समीकरणों का निकाय संगत है यदि और केवल यदि—

(a) $\rho(A) = \rho([A : B])$

(b) $\rho(A) = \rho(B)$

(c) $\rho(A) \neq \rho([A : B])$

(d) $\rho(A) \neq \rho(B)$

The system of equations is consistent if and only if:

(a) $\rho(A) = \rho([A : B])$

(b) $\rho(A) = \rho(B)$

(c) $\rho(A) \neq \rho([A : B])$

(d) $\rho(A) \neq \rho(B)$

(iii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय सदिश हैं तब $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ का

मान है—

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are coplanar vectors, then the value of

$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ is :

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(iv) यदि आयतन V पृष्ठ द्वारा S परिवद्ध है तब $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} \, ds$

का मान है—

(a) V (b) $2V$ (c) $3V$

(d) 0

If V is the volume bounded by the surface S , then

the value of $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} \, ds$ is :

(a) V (b) $2V$ (c) $3V$

(d) 0

(v) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

एक दीर्घवृत्त को प्रदर्शित करता है यदि—

(a) $h^2 < ab$ (b) $h^2 > ab$ (c) $h^2 = ab$ (d) $h^2 \neq ab$

The equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents an ellipse if :

(a) $h^2 < ab$ (b) $h^2 > ab$ (c) $h^2 = ab$ (d) $h^2 \neq ab$

खण्ड-‘ब’

Section-‘B’

5×5=25

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्नों के अंक समान हैं। शब्द सीमा 250 है।

Note : Attempt all five questions. Each question carries equal marks. Word limit is 250 words.

इकाई-I

Unit-I

2. आर्यभट्ट के बारे में संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये।

Write a short note on Aryabhata.

[6]

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि किसी ऐकिक आव्यूह के आइगेन मान इकाई मापांक के होते हैं।

Prove that the eigen values of a unitary matrix are of unit modulus.

इकाई-II

Unit-II

3. दर्शाइये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ कैली-हेमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करता है।

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ satisfies Cayley-Hamilton Theorem.

अथवा

Or

हल कीजिए—

110163

[7]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Solve :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

इकाई-III

Unit-III

4. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय सदिश हो तो दिखाइए कि

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$$

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are non coplanar vectors then show that :

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$$

अथवा

Or

110163

PTO

यदि $\vec{r} = \vec{a}e^{mt} + \vec{b}e^{-nt}$ जहाँ $\vec{a}, \vec{b}$ अचर सदिश हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = 0$$

If $\vec{r} = \vec{a}e^{mt} + \vec{b}e^{-nt}$, where $\vec{a}, \vec{b}$ are constant vector, then prove that :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = 0$$

इकाई-IV

Unit-IV

5. यदि $f(t) = ti + (t^2 - 2t)j + (3t^2 + 3t^3)k$ है तब

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

If $f(t) = ti + (t^2 - 2t)j + (3t^2 + 3t^3)k$, then evaluate

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

अथवा

Or

स्टोक प्रमेय के प्रयोग के सिद्ध कीजिए कि

$$\int_C (e^x dx + 2y dy - dz) = 0$$

जहाँ वक्र C दिया गया है : $x^2 + y^2 = 4, z = 0$

Prove that $\int_C (e^x dx + 2y dy - dz) = 0$ by using Stoke's theorem, where curve C is given by : $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

इकाई-V

Unit-V

6. मूल बिन्दु से होकर जाने वाला तथा $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$

और $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ का लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of circle passing through origin and points of intersection of the circles $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

अथवा

Or

[10]

शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0, 0, 3)$ है तथा आधार वक्र $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ है।

Find the equation of cone whose vertex is $(0, 0, 3)$ and base curve is $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

खण्ड-'स'

Section-'C'

4×10=40

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

नोट : निम्नलिखित में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
प्रत्येक प्रश्नों के अंक समान हैं। शब्द सीमा 500 है।

Note : Answer any **four** questions. Each question carries equal marks. Word limit is 500 words.

7. आव्यूह A को प्रसामान्य रूप में बदलिए तथा उसकी जाति एवं शून्यता ज्ञात कीजिए। जहाँ —

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

110163

[11]

Find the normal form of matrix A and hence find its rank and nullity, where

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

8. आव्यूह B का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि यह समीकरण B द्वारा सत्यापित होता है और B^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Find the characteristic equation of the matrix B and verify that it is satisfied by B and hence find B^{-1} .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

110163

PTO

9. आव्यूह विधि से हल कीजिए—

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Solve by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

10. यदि $\vec{a} = \sin \theta i + \cos \theta j + \theta k$, $\vec{b} = \cos \theta i + \sin \theta j -$

$$3k, \vec{c} = 2i + 3j - k \text{ है तो } \theta = 0 \text{ पर } \frac{d}{d\theta} \left\{ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right\}$$

ज्ञात कीजिए।

$$\text{If } \vec{a} = \sin \theta i + \cos \theta j + \theta k, \vec{b} = \cos \theta i + \sin \theta j - 3k,$$

$$\vec{c} = 2i + 3j - k, \text{ then find } \frac{d}{d\theta} \left\{ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right\} \text{ at } \theta = 0$$

11. $\int_C \{ (xy + y^2) dx + x^2 dy \}$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय

सत्यापित कीजिए जहाँ C , $y = x$ तथा $y = x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in plane for $\int_C \{ (xy + y^2) dx + x^2 dy \}$ where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

12. शांकव $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

$$\text{Trace the conic } x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0.$$

13. बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक सरल रेखा

$$x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ के समान्तर है तथा उसका निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त}$$

$$x^2 + 2y^2 = 1, z = 3 \text{ है।}$$

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is

$$\text{the ellipse } x^2 + 2y^2 = 1, z = 3.$$