

Mathematics
Calculus & Differential Equations
110164

B. A./B. Sc. (First Year) Examination, 2024

(Major-II/Minor/Open Elective/GEC)

MATHEMATICS

(Calculus & Differential Equations)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार उत्तर दीजिए।
निर्धारित अंक खण्डों के समक्ष अंकित हैं।

Note : Attempt all question of all **three** section as directed. Marks are indicated against sections.

खण्ड-अ

Section-A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(Objective Type Questions)

5×1=5

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note : Attempt all questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि $y = e^{3x}$ तो y_n बराबर है—

- (a) 3^n
- (b) e^{3x}
- (c) $3^n e^{3x}$
- (d) $3e^x$

If $y = e^{3x}$ then y_n equal :

- (a) 3^n
- (b) e^{3x}
- (c) $3^n e^{3x}$

(d) $3e^x$

(ii) यदि $S = C \sec \psi$ तो P का मान है—

- (a) $C \sec \psi$
- (b) $C \sec \psi \cdot \tan \psi$
- (c) $C \sec^2 \psi \cdot \tan \psi$
- (d) इनमें से कोई नहीं

If $S = C \sec \psi$ the the value of P is :

- (a) $C \sec \psi$
- (b) $C \sec \psi \cdot \tan \psi$
- (c) $C \sec^2 \psi \cdot \tan \psi$
- (d) None of these

(iii) यदि $f(x)$ एक समफलन है तब $\int_{-a}^a f(x) dx$ बराबर होगा—

- (a) 0

(b) $2 \int_a^a f(x) dx$

(c) $2 \int_0^a f(x) dx$

(d) 1

If $f(x)$ is an even function then $\int_{-a}^a f(x) dx$

equal :

(a) 0

(b) $2 \int_a^a f(x) dx$

(c) $2 \int_0^a f(x) dx$

(d) 1

(iv) अवकल समीकरण $M dx + N dy = 0$ के यथातय होने

का प्रतिबन्ध है—

(a) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$

(b) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

(d) इनमें से कोई नहीं

The differential equation $M dx + N dy = 0$ is exact

if:

(a) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$

(b) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

(d) None of these

(v) विशेष समाकलन $\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x} \cdot V$ का मान है—

$$(a) e^{ax} \frac{1}{f(D-a)} \cdot V$$

$$(b) e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} \cdot V$$

$$(c) V \cdot \frac{1}{f(D+a)} \cdot e^{ax}$$

(d) इनमें से कोई नहीं

The value of particular integral of $\frac{1}{f(D)} e^{ax} \cdot V$

is:

$$(a) e^{ax} \frac{1}{f(D-a)} \cdot V$$

$$(b) e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} \cdot V$$

$$(c) V \cdot \frac{1}{f(D+a)} \cdot e^{ax}$$

(d) None of these

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँचों प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ तो सिद्ध कीजिए—

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$$

$$\text{तथा } (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

If $y = (\sin^{-1} x)^2$ then prove that :

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$$

$$\text{and } (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

अथवा

Or

टेलर प्रमेय द्वारा $\sin x$ को $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ की घातों में प्रसारित
कीजिए।

Expand $\sin x$ in powers of $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ by use of Taylor's
theorem.

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिए वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु

$(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $3a \sin \theta \cdot \cos \theta$ है।

Prove that the radius of curvature at the point

$(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is

$$3a \sin \theta \cdot \cos \theta.$$

अथवा

Or

वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2(2a-x) = x^3$.

इकाई-III

Unit-III

4. समाकलन $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of the integral $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$.

अथवा

Or

वक्रों $y = x^3$ तथा $y = x^2$ के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area between the curves $y = x^3$ and $y = x^2$.

इकाई-IV

Unit-IV

5. अवकल समीकरण $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation :

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$$

अथवा

Or

अवकल समीकरण $(y - px)^2 + a^2 p = 0$ का व्यापक तथा विचित्र हल ज्ञात कीजिए।

Find the general and singular solution of the differential equation :

$$(y - px)^2 + a^2 p = 0$$

इकाई-V

Unit-V

6. अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x$ को हल कीजिए।

Solve the differential equation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 3x$$

अथवा

Or

अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 13y = \log x$ को हल

कीजिए।

Solve the differential equation :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 13y = \log x$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

4×10=40

(Long Answer Type Questions)

नोट : निम्नलिखित में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

Note : Attempt any four questions of the following.

Each question carries 10 marks.

7. लैबनीट्ज प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the Leibnitz's theorem.

8. यदि

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$$

तो सिद्ध कीजिए, कि—

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

If

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$$

then prove that :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

9. वक्र $ay^2 = x^2(a-x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve

$$ay^2 = x^2(a-x)$$

10. समाकलन $\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{3/2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए—

Find the value of integral :

$$\int_0^1 x^{3/2} (1-x)^{3/2} dx$$

11. अवकल समीकरण $(1+x^2) \frac{dy}{dx} = xy - y^2$ को हल कीजिए।

Solve the following differential equation :

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} = xy - y^2$$

12. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए—

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x} \cdot \sin 3x$$

Solve the following differential equation :

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x} \cdot \sin 3x$$

13. निम्न अवकल समीकरण को प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए—

110164

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = \operatorname{cosec} ax$$

Solve the differential equation :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = \operatorname{cosec} ax$$