Printed Pages- 8

**2200759**

# B.Sc. (Second Year)

## Examination, 2025

## Major-I

## Mathematics

## Abstract Algebra and Linear Algebra

*Time Allowed : Three hours*

*Maximum Marks : 70*

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्नों का उत्तर दीजिए। अंकों का विभाजन खण्डों के समक्ष दिया गया है।

*Note : Attempt questions all* ***three*** *sections as directed. Distribution of marks is given against each section.*

## खण्ड - 'अ'

## *Section - 'A'*

**( वस्तुनिष्ठ प्रश्न )**

**( Objective Type Questions )**

[5 × 1 = 5]

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

*Note : Attempt all the following questions. Each question carries 1 mark.*

1. सही उत्तर का चयन कीजिए -

Choose the correct answer-

(i) समूह (I, *), जहाँ a*b=a+b+1, का तत्समक अवयव है?

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) –2

The identity element of the group (I, *), where a * b = a + b + 1, is:

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) –2

(ii) $S_4$ सममित समूह की कोटि क्या है?

(a) 6 (b) 12

(c) 18 (d) 24

What is the order of symmetric group $S_4$.

(a) 6 (b) 12

(c) 18 (d) 24

(iii) पूर्णांकीय प्रांत $\{0,1,2,3,4(\text{mod}\,5)\}$ का भागफल क्षेत्र है-

(a) $\{0,1,2,3,4\}$ (b) $\{1,2,3,4\}$

(c) $\{2,3,4\}$ (d) $\{4\}$

The quotient field of the integral domain $\{0,1,2,3,4(\text{mod}\,5)\}$ is -

(a) $\{0,1,2,3,4\}$ (b) $\{1,2,3,4\}$

(c) $\{2,3,4\}$ (d) $\{4\}$

(iv) यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) की उपसमष्टि है तब-

(a) dim V/W = dim V- dim W

(b) dim V/W = dim V

(c) dim V/W = dim V+ dim W

(d) dim V/W = dim W

If W is a subspace of a finite dimensional vector space V(F), then-

(a) dim V/W = dim V- dim W

(b) dim V/W = dim V

(c) dim V/W = dim V+ dim W

(d) dim V/W = dim W

(v) आव्युह A का आईगेन मान $\lambda$ है यदि और केवल यदि-

(a) A सिंगुलर है

(b) $(A+\lambda I)$ सिंगुलर है

(c) $(A-\lambda I)$ सिंगुलर है

(d) $(A-\lambda I)^n$ सिंगुलर है

The eigen value of matrix A is $\lambda$ if and only if-

(a) A is singular

(b) $(A+\lambda I)$ is singular

(c) $(A-\lambda I)$ is singular

(d) $(A-\lambda I)^n$ is singular

## खण्ड - 'ब'

## Section - 'B'

### ( लघुउत्तरीय प्रश्न )

### ( Short Answer Type Questions )

[5 × 5 = 25]

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है । प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है । शब्द सीमा 250 शब्द।

*Note :* *Attempt all five questions.* ***One*** *question from each unit is* ***compulsory****. Each question carries 5 marks. Word limit 250 words.*

### इकाई - I

### Unit - I

2. किसी समूह G के प्रत्येक अवयव $a, b \in G$ के लिये सिद्ध कीजिए

$$(a0b)^{-1} = b^{-1}0\, a^{-1}$$

For every element in a group G, prove that

$$(a0b)^{-1} = b^{-1}0\, a^{-1}$$

**अथवा**

**OR**

यदि एक समूह के किसी अवयव a की कोटि n हो तो सिद्ध कीजिए $a^m = e$ यदि और केवल यदि $m = nq$ , q एक पूर्णांक है।

If order of an element *a* of a group is n then prove that $a^m = e$ if and only if $m = nq$ , q is an integer.

## इकाई - II

## Unit - II

3. सिद्ध कीजिए कि समूह G पर सभी आन्तरिक स्वाकारिताओं का समुच्चय I(G), समूह G की स्वाकारिताओं के समूह A(G) का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that the set I(G) of all inner automorphisms of a group G is a normal subgroup of the group A(G) of automorphisms of group G.

अथवा

OR

सिद्ध कीजिए कि समूहों के समुच्चयों में तुल्याकारिता का सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध होता है।

Prove that the relation of isomorphism in the set of all groups is an equivalence relation.

## इकाई - III

## Unit - III

4. सिद्ध कीजिए कि वलय R से वलय R' पर समाकारिता की अष्टि R की गुणजावली हाती है।

Prove that Kernel of homomorphism from ring R to R' is an ideal of R.

अथवा

OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रांत होता है।

Prove that every field is an integral domain.

## इकाई - IV

## Unit - IV

5. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक n-विमीय सदिश समष्टि V(F), $V_n(F)$ से तुल्याकारी होती है।

Prove that every n- dimensional vector space V(F) is isomorphic to $V_n(F)$.

अथवा

OR

यदि $W_1$ और $W_2$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियां हैं तब सिद्ध कीजिए

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If $W_1$ and $W_2$ are two subspace of a finite dimensional vector space V(F) then prove that

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

इकाई - V

Unit - V

6. सिद्ध कीजिए कि एक आव्यूह के भिन्न-भिन्न आइगेन मान के संगत आइगेन सदिश रैखिकत स्वतंत्र होते हैं।

Prove that the eigen vectors corresponding to distinct eigen values of a matrix are linearly independent.

अथवा

OR

दर्शाइये कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

विकर्णीय नहीं है।

Prove that the matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

is not diagonalizable.

## खण्ड - 'स'

## Section - 'C'

### ( दीर्घ उत्तरीय प्रश्न )

### ( Long Answer Type Questions )

[4 × 10 = 40]

**नोट :** निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है। शब्द सीमा 500 शब्द।

***Note :*** *Attempt any **four** questions from following. Each question carries 10 marks. Word limit 500 words.*

7. चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समूह का प्रत्येंक उपसमूह चक्रीय होता है।

   Define cyclic group and prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

8. अनन्त समूह के लिए कैली का प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

   State and prove Caley's theorem for infinite groups.

9. सिद्ध कीजिए कि वलय R पर सभी बहुपदों का समुच्चय $R[x]$ योग और गुणन के सापेक्ष वलय बनाता है।

   Prove that set of all polynomials over a ring R form of ring with respect to addition and multiplication.

10. अस्तित्व प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

    State and prove existence theorem.

11. माना कि T, $R^3$ पर एक रैखिक रूपान्तरण है जो कि इस प्रकार परिभाषित है।

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

तब $R^3$ के मानक आधार के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए T व्युत्क्रमणीय है।

Let T be a linear transformation on $R^3$ defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

then find the matrix of T with respect to standard basis of $R^3$ and prove that T is invertible.

12. निम्न परिभाषित रैखिक रूपान्तरण $T : V_3 \to V_3$ के लिए जाति-शून्यता प्रमेय सत्यापित कीजिए।

$$T(e_1) = e_1 - e_2$$
$$T(e_2) = 2e_2 + e_3$$
$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Verify Rank-nullity theorem for the linear transformation $T : V_3 \to V_3$ defined by

$$T(e_1) = e_1 - e_2$$
$$T(e_2) = 2e_2 + e_3$$
$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

******