

2200759

B.Sc. II Year
Main Examination, 2026
Mathematics
Paper: Major-I
Abstract Algebra and Linear Algebra

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अंकों का विभाजन खण्डों के समक्ष दिया गया है।

*Note : Attempt question all three sections as directed.
Distribution of marks of given against each section.*

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

(Objective Type Questions)

[5 × 1 = 5]

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note : Attempt all the following questions each question carries 1 marks.

[2]

1. सही उत्तर का चयन कीजिए-

Choose the correct answer-

(i) कोटि 10 के चक्रीय समूह के जनक है:

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5

The number of generator of a cyclic group of order 10 is :

- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5

(ii) G और G^1 तुल्याकारी है यदि G चक्रीय हो तो:

- (A) G^1 चक्रीय होगा
- (B) G^1 चक्रीय हो सकता है
- (C) G^1 चक्रीय नहीं होना चाहिए
- (D) G और G^1 में अवयवों की संख्या समान है।

G and G^1 are isomorphic if G is cyclic then:

- (A) G^1 will be cyclic
- (B) G^1 can be cyclic
- (C) G^1 should not cyclic
- (D) G and G^1 have same number of elements.

C-13 (495/750) 2200759

[3]

(iii) पूर्णांकों का वलय है-

- (A) गुणा के सापेक्ष समूह
- (B) क्षेत्र
- (C) पूर्णांकीय प्रान्त
- (D) यूक्लिडीय वलय

Ring of integers is:

- (A) Group with respect to multiplication
- (B) Field
- (C) Integral domain
- (D) Euclidean ring

(iv) यदि सदिश समष्टि V में, यदि $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ V को जनित करता है और $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ रैखिकतः स्वतंत्र है, तब

- (A) $m < n$
- (B) $m \leq n$
- (C) $m = n$
- (D) $m \geq n$

C-13 (495/750)

2200759

[P.T.O.]

[4]

In a vector space V , if $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generates V and if $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ is linearly independent, then.

- (A) $m < n$
 (B) $m \leq n$
 (C) $m = n$
 (D) $m \geq n$
- (v) यदि $T(a, b) = (a, 0)$ सदिश समष्टि $V_2(R)$ पर एक रैखिक रूपांतरण है तब $V_2(R)$ के मानक क्रमित आधार के सापेक्ष का आव्यूह है:

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

[5]

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

If $T(a, b) = (a, 0)$ be a linear transformation on the vector space $V_2(R)$, then Matrix of T relative to the standard order basis of $V_2(R)$ is :

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[6]

खण्ड-'ब'

Section-'B'

लघु उत्तरीय प्रश्न

(Short Answer Type Questions)

[5 × 5 = 25]

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है। शब्द सीमा 250 शब्द हैं।

Note : Attempt all five questions. One questions from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks. word limit is 250 words.

इकाई-I

Unit-I

2. सिद्ध करो कि इकाई के चार चतुर्थ मूलों का समुच्चय गुणनात्मक आवेली समूह बनाता है।

Prove that the set of four fourth roots of unity forms a

C-13 (495/750)

2200759

[7]

multiplicative abelian group.

अथवा/OR

सिद्ध कीजिए कि समूह G का उपसमूह H , G का प्रसामान्य उपसमूह होगा यदि और केवल यदि G में H का प्रत्येक वाम सहसमुच्चय G से H का दक्षिण सहसमुच्चय है।

Prove that the subgroup H of a group G is normal subgroup if every left coset of H in G is right coset of H in G .

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिए n - अवयवों के L_n क्रमचय गुणन के सापेक्ष समूह बनाते हैं।

Prove that L_n permutations of n -elements form a group with respect to multiplication.

अथवा/OR

दिखाओ कि $a \rightarrow a^{-1}$ समूह G की स्वाकारिता है यदि और केवल यदि आवेली है।

Show that $a \rightarrow a^{-1}$ is automorphism of G if and only if G is abelian.

C-13 (495/750)

2200759

[P.T.O.]

Unit-III

4. सिद्ध कीजिए एक वलय R शून्य भाजक रहित होता है यदि और केवल यदि R में गुणनात्मक निरसन नियमों का पालन होता है।

Prove that a ring R is a ring without zero divisors iff multiplicative cancelation law holds in R .

अथवा/OR

पूर्णांकीय प्रांत को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

Define Integral domain with example.

इकाई-IV

Unit-IV

5. यदि W परिमित विमीय सदिश समष्टि V की एक उपसमष्टि है तब सिद्ध कीजिए।

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

If W be a subspace of a finite dimensional vector space V .

then prove that $\dim V/W = \dim V - \dim W$

दिखाओ कि सदिश $(2,1,4), (1,-1,2), (3,1,-2)$ R^3 के लिए आधार बनाते हैं।

Show that the vectors $(2,1,4), (1,-1,2), (3,1,-2)$ form a basis for R^3 .

इकाई-V

Unit-V

6. निम्नलिखित आव्यूह के आईगन मान एवं संगत आईगन सदिश ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

[10]

अथवा/OR

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ तब एक आव्यूह P इस प्रकार

ज्ञात कीजिए कि $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, then find a matrix P such that

$P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$

खण्ड-'स'

Section-'C'

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

[4 × 10 = 40]

C-13 (495/750)

2200759

[11]

नोट : किन्ही चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Note: Attempt any four questions.

7. ब्रम्हगुप्त की संक्षिप्त जीवनी लिखिए।

Write a short Biography of Brahmagupta.

8. समूहों की समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and Prove fundamental theorem on homomorphism of rings.

9. क्षेत्र को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्राप्त होता है।

Define the field and prove that every field is an integral domain.

10. सिद्ध कीजिए कि समूह G पर सभी स्वाकारिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह है।

Prove that the set of all automorphism on group G is a group with respect to composition of mappings.

11. विस्तार प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and Prove Extension Theorem.

12. जाति शून्यता प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

C-13 (495/750)

2200759

[P.T.O.]

State and prove Rank-Nullity theorem.

13. सिद्ध कीजिए आव्यूह A विकर्णीय नहीं है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is not diagonalizable, where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$
